

Teorie Reziduí

Laurentova Řada (LŘ)

Nechť je Ω mezikruhovatá oblast se středem v bodě z_0 . Jestli-že komplexní funkce $f(z)$ je holomorfní v oblasti Ω , potom pro každé $z \in \Omega$ je možné funkci $f(z)$ vyjádřit Laurentovou Řadou:
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde konstanty a_n jsou určeny vzorci: $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$ a Γ je libovolná kružnice ležící v mezikruží Ω .

- Část $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ se nazývá hlavní část LŘ
- Taylorova Řada je zvláštním případem LŘ (hlavní část je rovna 0)
- Pro rozvoj racionální komplexní funkce v LŘ využíváme vzorec na součet geometrické řady (je to jednodušší, než křivkový integrál)
 - Geometrická řada: posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_0 q^n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá geometrická posloupnost. Je-li $|q| \geq 1$ GŘ diverguje, je-li $|q| < 1$ GŘ konverguje a
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = \frac{a_0}{1-q}.$$

Singulární body komplexní funkce, Reziduová věta

Nechť komplexní funkce $f(z)$ je holomorfní v určitém okolí bodu z_0 s výjimkou bodu z_0 . Pak se z_0 nazývá *singulárním bodem* funkce $f(z)$.

Klasifikace singulárních bodů:

- Odstranitelná singularita
 - Hlavní část LŘ v bodě z_0 se rovná 0
 - $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$ a je konečná
- Podstatná singularita
 - Hlavní část LŘ v bodě z_0 se má nekonečně mnoho nenulových členů
 - $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ neexistuje
- Pól m -tého řádu
 - Hlavní část LŘ v bodě z_0 se má konečně mnoho nenulových koeficientů
 - tj. pro $a_n = 0$ pro $n < -m$; $a_{-m} \neq 0$ a platí, že $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$

Nejdůležitější singulární body komplexní funkce jsou póly.



- Pro určení řádu pólu užíváme limity $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = a_{-m}$, která musí být vždy konečná a nenulová.
- Koeficient a_{-1} z LŘ funkce $f(z)$ v bodě z_0 se nazývá reziduem funkce $f(z)$ v bodě z_0 .
Značíme $a_{-1} = \operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$
- Vzorec pro určení rezidua pro pól prvního řádu $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z)$
- Vzorec pro určení rezidua pro pól m -tého řádu

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m \cdot f(z)]$$
- Necht $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, kde funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ jsou holomorfní v bodě z_0 , $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, potom má funkce $f(z)$ v bodě z_0 pól prvního řádu a platí, že

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Reziduová Věta

Necht komplexní funkce $f(z)$ je holomorfní uvnitř a na jednoduché uzavřené, kladně orientované křivce Γ s výjimkou pólů $z_1, z_2, \dots, z_n$. Uvnitř křivky Γ potom platí:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z).$$

Sčítáme tedy pouze rezidua v pólech, které leží uvnitř křivky Γ .

