



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

*Vytvořeno v rámci projektu Rozvoj kvality vzdělávání, hodnocení
a strategického řízení na Univerzitě Pardubice, reg. č.
CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002320*

Úvod do numerické matematiky- Chyby

poznámky k přednáškám

Numerická matematika

- převod spojité úlohy na diskrétní

(integrál, derivace apod. -> ar. Operace +,-,*,/)

Vstupní data -> Algoritmus -> Výstupní data

-> +,-,*,/

-> substituce

-> podmíněné příkazy

-> ...

- vstupní data = konečná množina čísel, které je zapotřebí k jednoznačnému řešení

- algoritmus = konečná posloupnost výpočetních kroků

- výstupní data = konečná množina čísel, která je řešením dané úlohy

- nejsme schopni řešit problémy v původním rozsahu -> MODEL -> bereme v úvahu pouze některé faktory

- rozdíl mezi obdrženým výsledkem a skutečným řešením původního problému (musíme být schopni odhadnout, jak velká je nepřesnost)

CHYBY – rozdělení podle toho, kde vznikají

a) **CH matematického modelu** – zanedbání některých skutečností (rozdíl mezi modelem a skutečným stavem)

Př. Kalendář jako model roku

(Juliánský: zaveden Juliem Caesarem

délka 365,25 dne -> každý 4. přestupný

-> model se zpožďuje

-> chyba je 1 den za 128 let)

b) **CH vstupních údajů** – VST DATA jsou získána měřením => chyby měření

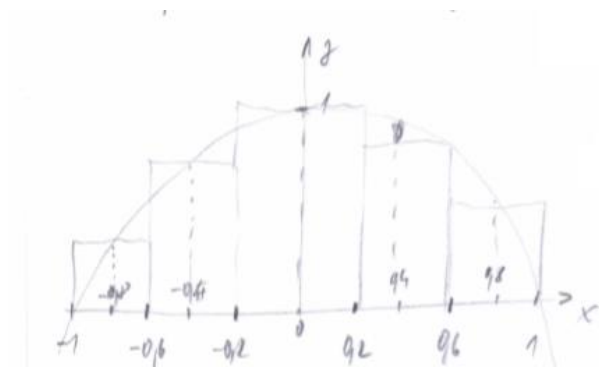
=> násobné chyby

c) **CH numerické metody** -> spojitá úloha -> diskrétní

PŘ: Výpočet určitého Integrálu

$\int_{-1}^1 (1 - x^2) dx$ – obsah plochy pod grafem

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} = 1, \bar{3}$$



Diskrétně: dělení 0,4

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = f(-0,3) \times 0,4 + f(-0,1) \times 0,4 + f(0) \times 0,4 + f(0,2) \times 0,4 + f(0,8) \times 0,4 = 1,36$$

$$x = 1, \bar{3} \quad |\tilde{x} - x| = 0,02\bar{6}$$

$$\tilde{x} = 1,36 \quad \frac{|\tilde{x} - x|}{x} = 0,0196 \doteq 0,02 \rightarrow 2\% \quad \text{Chyba metody je asi 2\%}$$

d) **Zaokrouhlování chyby** → čísla zaokrouhlujeme → chyby → kumulace

x ... reálné číslo
 $\tilde{x}$... aproximace

proces se nazývá zaokrouhlování

chyba aproximace

Absolutní chyba $\varepsilon(\tilde{x}) = |x - \tilde{x}|$

Relativní chyba $\delta(\tilde{x}) = \frac{|x - \tilde{x}|}{\tilde{x}}$

$$\rightarrow \text{odhad ACH} \quad |x - \tilde{x}| \leq \varepsilon(\tilde{x})$$

$$\rightarrow \text{odhad RCH} \quad \frac{|x - \tilde{x}|}{\tilde{x}} \leq \delta(\tilde{x})$$

→ RCH je nezávislá na volbě jednotky → míra přesnosti výpočtu

→ $\delta(\tilde{x}) \times 100$... RCH v %

PŘ:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 0,32 \quad \tilde{x}_1 = 0,3 \\ x_2 = 0,08 \quad \tilde{x}_2 = 0,1 \end{array} \right\} \text{jsou aproximace čísel } x_1, x_2 \text{ stejně hodnotné?}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon(\tilde{x}_1) = 0,02 \\ \varepsilon(\tilde{x}_2) = 0,02 \end{array} \right\} \text{stejná hodnota}$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta(\tilde{x}_1) = \frac{0,02}{0,3} = 0,06 \rightarrow 6\% \\ \delta(\tilde{x}_2) = \frac{0,02}{0,1} = 0,2 \rightarrow 20\% \end{array} \right\} \text{Nejsou stejně hodnotné}$$

- Při správném zaokrouhlování: absolutní chyba nikdy nepřesáhne polovinu jednotky řádu poslední ponechané číslice

PPČ: číslo x (10 soust., normovaný tvar) mantisa $\in (0; 1)$

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k \alpha_{k+1} \dots \cdot 10^N$$

Říkáme, že aproximace $\tilde{x}$ čísla x má j -tou číslici platnou, jestliže platí:

$$|x - \tilde{x}| \leq 0,5 \cdot 10^{n-j}$$

Př. :

$$x = \pi = 3,14159 \dots \tilde{x} = 3,1415$$

$$\text{Normovaný tvar} \quad 0,31415 \cdot 10^1 \quad (n = 1)$$

$$|3,14159 - 3,1415| = 0,00009$$

$j = 0$	$0,5 \cdot 10^1 = 5$	✓
$j = 1$	$0,5 \cdot 10^0 = 0,5$	✓
$j = 2$	$0,5 \cdot 10^{-1} = 0,05$	✓
$j = 3$	$0,5 \cdot 10^{-2} = 0,005$	✓
$j = 4$	$0,5 \cdot 10^{-3} = 0,0005$	✓
$j = 5$	$0,5 \cdot 10^{-4} = 0,00005$	✗

$$\underline{\text{PPČ} = j = 4}$$

3,141 → poslední 5 nevěříme

→ není správně zaokrouhlená

Celková chyba výpočtu

Předpokládejme: $Y = F(x_1; \dots; x_N)$ teoretická závislost

- F nahradíme numerickou metodou

$$y = f(x_1; \dots; x_n)$$

- Místo přesných hodnot $x_i; i = 1, \dots, n$ používáme jejich aproximaci $\tilde{x}_i$

$$y' = f(\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_n)$$

- Zaokrouhlování při výpočtu → $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_n)$

- Hodnoty y' a $\tilde{y}$ se liší

$$\text{CELKOVÁ CHYBA VÝPOČTU je:} \quad Y - \tilde{y} = F(x_1; \dots; x_n) - \tilde{f}(\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_n)$$

$$\text{PRIMÁRNÍ CHYBA:} \quad y - y' = f(x_1; \dots; x_n) - f(\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_n)$$

$$\text{SEKUNDÁRNÍ CHYBA:} \quad y' - \tilde{y} = f(\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_n) - \tilde{f}(\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_n)$$

ODHAD PRIMÁRNÍ CHYBY

$f(x_1; \dots; x_N)$ je spojitě diferencovatelná na množině $G = \{x_i: |x_i - \tilde{x}_i| \leq \alpha_i, \dots i = 1 \dots n\}$

$$\Rightarrow |f(x_1; \dots; x_n) - f(\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_n)| \leq \sum_{i=1}^N A_i \cdot \alpha_i \quad (1)$$

$$A_i = \sup_G \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1; \dots; x_n) \right| \quad i = 1; \dots; N$$

Př. : Odhadněte chybu operace $f(x; y) = y \cdot \ln x$ použijeme-li čísla

$\tilde{x} = 1,25$ a $\tilde{y} = 0,3125$, která mají všechny číslice platné

$$|f(x; y) - f(\tilde{x}; \tilde{y})| \leq \sum_{i=1}^2 A_i \cdot \alpha_i =$$

$$\alpha_1: |x - \tilde{x}| = |x - 1,25| \quad \text{správně zaokr. } \alpha_1 = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ (2 DM)}$$

$$\alpha_2: |y - \tilde{y}| = |y - 0,3125| \quad \text{správně zaokr. } \alpha_2 = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ (4 DM)}$$

$$A_1: \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}; \tilde{y}) \right| = \frac{y}{x}(\tilde{x}; \tilde{y}) = 0,25$$

$$A_2: \left| \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}; \tilde{y}) \right| = \ln x(\tilde{x}; \tilde{y}) = \ln 1,25 \doteq 0,223143551$$

$$= A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 = 0,25 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2} + 0,223143551 \cdot 0,5 \cdot 10^{-4} \doteq 0,12612 \cdot 10^{-2}$$

CHYBY SOUČTU, ROZDÍLU, SOUČINU A PODÍLU

Na základě vztahu (1) lze odvodit odhad chyb základních početních operací

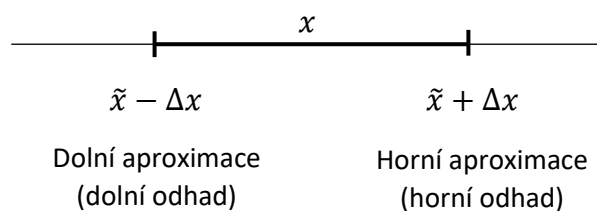
$$x = \tilde{x} \pm \Delta x = \tilde{x} \pm \tilde{x} \delta(x) = \tilde{x} (1 \pm \delta(x)) \quad \delta(x) = \frac{\Delta x}{\tilde{x}} \left(= \frac{\Delta x}{\tilde{x}} \cdot 100 \% \right)$$

$\tilde{x}$... Střední aproximace

Δx ... Absolutní chyba $\varepsilon(x)$

x ... Správná hodnota

$\delta(x)$... Relativní chyba



Pro sčítání platí:

$$x = \tilde{x} \pm \Delta x$$

$$y = \tilde{y} \pm \Delta y$$

$$x + y = (\tilde{x} + \tilde{y}) \pm (\Delta x + \Delta y)$$

$$0 \leq \delta(x + y) = \frac{\Delta x + \Delta y}{\tilde{x} + \tilde{y}} = \frac{\Delta x}{\tilde{x} + \tilde{y}} + \frac{\Delta y}{\tilde{x} + \tilde{y}} \leq \delta(x) + \delta(y) \quad \text{r. ch. se sčítají}$$

Pro rozdíl platí:

$$x = \tilde{x} \pm \Delta x$$

$$y = \tilde{y} \pm \Delta y$$

$$x - y = (\tilde{x} - \tilde{y}) \pm (\Delta x + \Delta y)$$

$$\delta(x - y) = \frac{\Delta x + \Delta y}{\tilde{x} - \tilde{y}} \quad \text{může jít k } \infty, \text{ když } \tilde{x} - \tilde{y} \text{ je skoro stejné}$$

r.ch rozdílů nelze v žádném výpočtu ??? kontrolou

Pro násobení platí

$$x = \tilde{x} \pm \Delta x$$

$$y = \tilde{y} \pm \Delta y$$

$$x * y = (\tilde{x} \pm \Delta x)(\tilde{y} \pm \Delta y) = \tilde{x}\tilde{y} \pm (\Delta x * \tilde{y} + \Delta y * \tilde{x})$$

$$\delta(x * y) = \frac{\Delta x \tilde{y} + \Delta y \tilde{x}}{\tilde{x} * \tilde{y}} \leq \delta(x) + \delta(y)$$

Pro dělení $\frac{1}{x}$ platí:

$$x = \tilde{x} \pm \Delta x$$

$$\tilde{x} - \Delta x \leq x \leq \tilde{x} + \Delta x$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\tilde{x} \pm \Delta x}$$

$$\frac{1}{\tilde{x} - \Delta x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\tilde{x} + \Delta x}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tilde{x} - \Delta x} + \frac{1}{\tilde{x} + \Delta x} \right) = \frac{\tilde{x}}{(\tilde{x} - \Delta x)(\tilde{x} + \Delta x)} = \frac{\tilde{x}}{(\tilde{x})^2} = \frac{1}{\tilde{x}}$$

$$\rightarrow \Delta \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tilde{x} - \Delta x} - \frac{1}{\tilde{x} + \Delta x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\tilde{x} + \Delta x - (\tilde{x} - \Delta x)}{(\tilde{x})^2} = \frac{\Delta x}{(\tilde{x})^2}$$

$$\rightarrow \delta \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{\Delta x}{(\tilde{x})^2} * x = \frac{\Delta x}{\tilde{x}} = \delta(x)$$

Pro dělení $\frac{x}{y}$ platí:

$$\frac{x}{y} = x * \frac{1}{y} = \tilde{x} * \left(\frac{1}{\tilde{y}} \right) * \left(1 \pm \delta \left(\frac{x}{y} \right) \right) = \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} (1 \pm (\delta(x) + \delta(y)))$$

Př: Odhad chyby rozdílu

Odhadněte chybu rozdílu $\widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2$, jestliže $\widetilde{x}_1 = 97,132$ a $\widetilde{x}_2 = 97,116$ a obě čísla mají stejný počet platných číslic (5).

$$\rightarrow \text{rozdíl } \widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2 = 97,132 - 97,116 = 0,016 = 0,16 \cdot 10^{-1} \quad n=-1$$

$$\varepsilon(\widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2) = 0,5 \cdot 10^{-3} + 0,5 \cdot 10^{-3} = 0,001$$

↓
3 DM

$$0,001 \leq 0,5 \cdot 10^{-1-j}$$

$$j=0 : 0,001 \leq 0,5 \cdot 10^{-1} = 0,05$$

$$j=1 : 0,001 \leq 0,5 \cdot 10^{-2} = 0,005$$

$$j=2 : 0,001 \leq 0,5 \cdot 10^{-3} = 0,0005$$

j=1 → rozdíl má pouze 1 platnou číslici

$$\rightarrow \text{rel. chyby: } \delta(\widetilde{x}_1) = \frac{\varepsilon\widetilde{x}_1}{\widetilde{x}_1} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{97,132} = 5 \cdot 10^{-6}$$

$$\delta(\widetilde{x}_2) = \frac{\varepsilon\widetilde{x}_2}{\widetilde{x}_2} = 5 \cdot 10^{-6}$$

$$\delta(\widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2) = \frac{0,001}{0,016} = 0,0625$$

$$\frac{0,0625}{5 \cdot 10^{-6}} = 12500$$

R.CH. rozdílu je 12500x větší než R.CH. čísel $\widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2$

Dobře a špatně podmíněné úlohy

→ KOREKTNÍ úlohy = spojité

→ NEKOREKTNÍ (dobře, špatně) PODMÍNĚNÉ

→ NEKOREKTNÍ ÚLOHA je dobře podmíněna, jestliže malé změně VSTUPNÍCH údajů odpovídá malá změna VÝSTUPNÍCH údajů

$$\rightarrow \text{číslo podmíněnosti } C_p = \frac{\text{relativní chyba výstupních dat}}{\text{relativní chyba vstupních dat}}$$

→ hraniční C_p nám udává jednoznačně $C_p \rightarrow 1$ dobře podmíněná

$C_p \rightarrow 100$ špatně podmíněná

→ podmanivost nesouvisí s použitým algoritmem řešení, je to vlastnost úlohy samotné

Př: Podmíněnost soustavy rovnic

Rozhodněte, zda je systém LR ($Ax=b$)

$$x_1 + 1,01x_2 = 2,01$$

$$1,01x_1 + 1,02x_2 = 2,03$$

Špatně podmíněně při změně pravých stran o -0,01

$$x_1 + 1,01x_2 = 2,01$$

$$x_1 + 1,01x_2 = 2,01$$

$$1,01x_1 + 1,02x_2 = 2,03$$

$$1,01x_1 + 1,02x_2 = 2,03$$

$$x_1 = 1$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1$$

$$x_2 = 0$$

$$\text{VSTUP} \quad b = \begin{pmatrix} 2,01 \\ 2,03 \end{pmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2,02 \end{pmatrix}$$

$$\text{VÝSTUP} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_p = \frac{\left| \frac{x - \tilde{x}}{\tilde{x}} \right|}{\left| \frac{b - \tilde{b}}{\tilde{b}} \right|} = \frac{\left| \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right|}{\left| \frac{\begin{pmatrix} 2,01 \\ 2,03 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2,02 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2,02 \end{pmatrix}} \right|} = \frac{\left| \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right|}{\left| \frac{\begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,01 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2,02 \end{pmatrix}} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} * \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2,02 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,01 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{1+1}} * \frac{\sqrt{4+2,02^2}}{\sqrt{0,01^2+0,01^2}}$$

= 201 Špatně PU

Stabilní algoritmus

-málo citlivé na změnu vstupních údajů- dobře podmíněný algoritmus

- málo citlivé na vliv zaokrouhlovaných chyb- xxxxxx stabilní algoritmus