

Soustavy Obyčejných Diferenciálních Rovnic prvního řádu (SODR1Ř)

Homogenní lineární DR 2. řádu (HLDR2) – souhrn MII

$$ay'' + by' + cy = 0; a, b, c \in R; a \neq 0$$

Kořeny charakteristické rovnice CHR $ar^2 + br + c = 0$	Obecné řešení
r_1, r_2 reálné různé	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = r$	$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$
r_1, r_2 komplexně sdružené $\alpha \pm \beta i$	$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

Nehomogenní lineární DR 2. řádu (NHLDR2)

$$ay'' + by' + cy = G(x); G(x) \neq 0; a, b, c \in R; a \neq 0$$

Obecné řešení se skládá z řešení homogenního y_h a partikulárního y_p

$$y = y_h + y_p$$

y_h určíme viz. výše

y_p určíme metodou neurčitých koeficientů odhadem podle tvaru $G(x)$

- $G(x)$ je polynom stupně n , (např. polynom 2. stupně) $\rightarrow y_p = Ax^2 + Bx + C$
- $G(x)$ je ve tvaru Ce^{kx} ; $C, k \in R, \rightarrow y_p = Ae^{kx}$
- $G(x)$ je ve tvaru $C \cos kx$ nebo $C \sin kx$; $C, k \in R, \rightarrow y_p = A \cos kx + B \sin kx$
- $G(x)$ je součin předcházejících typů $\rightarrow y_p$ je součin odhadů
(např. $G(x) = x \cdot \cos 3x \rightarrow y_p = (Ax + B) \cos 3x + (Cx + D) \sin 3x$)
- $G(x)$ je součet předcházejících typů $\rightarrow$ Princip SUPERPOZICE
(např. $G(x) = G_1(x) + G_2(x) \rightarrow y_p = y_{p1} + y_{p2}$)
- Zobecnění $G(x) = e^{ax}[P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx]$, m, n stupně $P_n(x)$ a $Q_m(x)$
 $p = \max(m; n)$ je stupeň $R_p(x)$ resp. $S_p(x)$
 - $a + bi$ není kořenem CHR $y_p = e^{ax}[R_p(x) \cos bx + S_p(x) \sin bx]$
 - $a + bi$ je k -násobným kořenem CHR $y_p = x^k e^{ax}[R_p(x) \cos bx + S_p(x) \sin bx]$

Nebo metodou variací konstant.



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



Soustavy Obyčejných Diferenciálních Rovnic 1. řádu (SODR1)

Základní pojmy

- Inženýrská praxe – např. úlohy z Mechaniky
- Soustava n diferenciálních rovnic prvního řádu tvaru
$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(x; y_1; \dots; y_n) \\ y_2' &= f_2(x; y_1; \dots; y_n), \quad [A] \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x; y_1; \dots; y_n)\end{aligned}$$
kde funkce $f_k (k = 1; \dots; n)$ jsou definovány na $(n + 1)$ - rozměrné oblasti $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$, nazýváme Normální Soustava Diferenciálních Rovnic Prvního Řádu (NSDR1)
- Řešením NSDR1 nazýváme každou skupinu n funkcí tvaru $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, které jsou spojitě diferencovatelné v nějakém intervalu $I \subset \Omega$ a pro všechny body $x \in I$ vyhovují dané NSDR1
- Úlohu určit řešení NSDR1, které vyhovuje n počátečním podmínkám $y_1(x_0) = b_1, y_2(x_0) = b_2, \dots, y_n(x_0) = b_n$, kde $[x_0; b_1; b_2; \dots; b_n] \in \Omega$, je libovolný, ale pevně zvolený bod, nazýváme *počáteční problém* pro NSDR1
- *Obecným řešením* NSDR1R budeme rozumět každou skupinu n funkcí závisících na n obecných parametrech $C_1; C_2; \dots; C_n$ takových, že vhodnou (přípustnou) volbou těchto konstant obdržíme řešení každého počátečního problému
- *Partikulárním řešením* NSDR1 nazveme takové řešení, které obdržíme z obecného řešení pevnou volbou konstant $C_1; C_2; \dots; C_n$.



Převedení ODRn na NSDR1

- Celá mechanika hmotného bodu a tuhého tělesa (včetně příbuzných oborů) je vybudována na druhém Newtonově zákoně, který má obecně tvar soustavy tří nelineárních ODR2R dle souřadnic:

$$\begin{aligned}x''(t) &= f(t; x(t); y(t); z(t); x'(t); y'(t); z'(t)) \\ y''(t) &= g(t; x(t); y(t); z(t); x'(t); y'(t); z'(t)), \quad [B] \\ z''(t) &= h(t; x(t); y(t); z(t); x'(t); y'(t); z'(t))\end{aligned}$$

kde $x''(t)$ je druhá derivace dráhy podle času, $x'(t)$ je první derivace dráhy podle času a f, g, h jsou dané funkce.

- Počáteční podmínky (charakterizují počáteční polohu a počáteční rychlost) jsou ve tvaru:
 $x(t_0) = x_0; y(t_0) = y_0; z(t_0) = z_0; x'(t_0) = u_0; y'(t_0) = v_0; z'(t_0) = w_0, \quad [C]$
kde $x_0; y_0; z_0; u_0; v_0; w_0$ jsou daná čísla.
- Problém $[B] + [C]$ převedeme na problém $[A]$ takto:
 - položíme: $u(t) = x'(t); v(t) = y'(t); w(t) = z'(t) \quad [D]$
 - přepíšeme rovnice $[B]$ do tvaru:
 $u'(t) = X(t; x(t); y(t); z(t); u(t); v(t); w(t))$
 $y''(t) = Y(t; x(t); y(t); z(t); u(t); v(t); w(t)), \quad [E]$
 $z''(t) = Z(t; x(t); y(t); z(t); u(t); v(t); w(t))$
 - k těmto třem rovnicím připojíme vztahy $[D]$, které přepíšeme na tvar:
 $x'(t) = u(t); y'(t) = v(t); z'(t) = w(t) \quad [F]$
 - počáteční podmínky přepíšeme:
 $x(t_0) = x_0; y(t_0) = y_0; z(t_0) = z_0; u(t_0) = u_0; v(t_0) = v_0; w(t_0) = w_0$
- Soustava rovnic $[E] + [F]$ tvoří soustavu ODR1 pro šest neznámých funkcí x, y, z, u, v, w .

Příklad:

Počáteční problém $y^{(IV)} - 2y'' + y = 0; y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y^{(III)}(0) = -1$ převedeme na počáteční problém pro soustavu ODR1.

- Položíme: $y_1 = y; y_2 = y'; y_3 = y''; y_4 = y^{(III)}$;
- Derivací z toho plyne: $y_1' = y_2; y_2' = y_3; y_3' = y_4; y_4' = y^{(IV)} = 2y_3 - y_1$;
- Po dosazení do původní rovnice dostaneme soustavu ODR1R:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= y_4 \\ y_4' &= -y_1 + 2y_3\end{aligned}$$

- S počátečními podmínkami: $y_1(0) = 0; y_2(0) = 1; y_3(0) = 0; y_4(0) = -1$;
- Zobecněním tohoto postupu lze snadno převést každou DR n -tého řádu na normální soustavu n diferenciálních rovnic prvního řádu.



Soustava Lineárních Obyčejných Diferenciálních Rovnic 1. řádu (LODR1)

LODR1 je soustava diferenciálních rovnic tvaru:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ &\quad \dots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{aligned} \quad [G]$$

kde všechny koeficienty (funkce) $a_{ij}(x)$ a funkce $f_k(x)$ jsou funkce spojité na intervalu I .

- Je-li $f_k(x) = 0, \forall x \in I$ a $k = 1, 2, \dots, n$ mluvíme o homogenní soustavě LODR1
- Je-li $f_k(x) \neq 0$ pro nějaké $x \in I$ a $k = 1, 2, \dots, n$ mluvíme o nehomogenní soustavě LODR1
- Pokud půjde o soustavu s konstantními koeficienty, budeme psát místo $a_{ij}(x)$ jen a_{ij} .
- Exaktně umíme řešit soustavy pouze s konstantními koeficienty, jinak musíme řešit numericky (viz. PAMAP, PAMAK).

Maticový zápis soustavy LODR1

Uvažujeme pouze konstantní koeficienty

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sloupcové vektory: $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$

Pak soustavu LODR1 $[G]$ můžeme zapsat stručně ve tvaru:

$$y' = A \cdot y + f(x).$$

Zavedeme-li ještě konstantní vektor $b = (b_1; b_2; \dots; b_n)^T$, kde $b_i, i = 1, \dots, n$ jsou pravé strany počátečních podmínek, potom můžeme psát počáteční podmínky ve tvaru $y(x_0) = b$.



Obecná homogenní soustava LODR1

$$y' = A(x) \cdot y \quad (H)$$

Linearita prostoru řešení

Jsou-li vektory $y_1, y_2, \dots, y_k$ řešením soustavy $y' = A(x) \cdot y$ na intervalu I , potom také jejich lineární kombinace $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_k y_k$ je řešením této soustavy na intervalu I .

Ověření dosazením do H :

$$\begin{aligned} y' = A(x) \cdot y &\rightarrow (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_k y_k)' = A(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_k y_k) \\ \text{derivujeme} &\rightarrow C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots + C_k y_k' = A(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_k y_k) \rightarrow \\ &\rightarrow y_1' = A(x) y_1 \dots y_k' = A(x) y_k \end{aligned}$$

Fundamentální systém

Jsou-li vektory $y_1, y_2, \dots, y_n$ lineárně nezávislé na intervalu I a jsou-li řešením soustavy H , potom říkáme, že tvoří *fundamentální systém* řešení soustavy H na intervalu I .

Fundamentální matice

Nechť vektory $y_1, y_2, \dots, y_n$ jsou řešením soustavy H . Tyto vektory jsou lineárně nezávislé na intervalu I právě tehdy, když matice

$$Y = Y(x) = [y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix}, \text{ jejíž sloupce tvoří vektory } y_1, y_2, \dots, y_n$$

má na intervalu I nenulový determinant. Matice se nazývá *fundamentální matice* soustavy.

Struktura obecného řešení

Tvoří-li vektory $y_1, y_2, \dots, y_n$ fundamentální systém řešení homogenní soustavy $y' = A(x) \cdot y$ na intervalu I , potom každé řešení y této soustavy lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$, kde $C_i, i = 1, \dots, n$ jsou vhodné konstanty

Položíme-li $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)^T$, potom lze psát $y = Y \cdot C = C^T \cdot Y^T$, kde Y je fundamentální matice.

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ je vyjádření obecného řešení soustavy $y' = A(x) \cdot y$.



Homogenní soustava LODR1 s konstantními koeficienty

Tvar: $y' = A \cdot y$ (G), kde A je konstantní matice

- K určení obecného řešení OŘ soustavy je třeba nalézt n lineárně nezávislých řešení této soustavy
- K nalezení těchto n lineárně nezávislých řešení vede **Eulerova metoda vlastních čísel**
- Konstrukce fundamentálního systému řešení:
 - Hledáme partikulární řešení $y_p = e^{\lambda x} \cdot h = e^{\lambda x} (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$, kde je třeba určit neznámé $\lambda \in \mathbb{C}$ a $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T \in \mathbb{C}^n$
 - Vektor $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$ je nenulový (alespoň jedna složka je různá od nuly)
 - Dosazením do (G) dostaneme: $y_p' = \lambda \cdot e^{\lambda x} \cdot h = A \cdot (e^{\lambda x} \cdot h) = e^{\lambda x} \cdot A \cdot h$
 - V rovnici $\lambda \cdot e^{\lambda x} \cdot h = e^{\lambda x} \cdot A \cdot h$ krátíme $e^{\lambda x} \rightarrow A \cdot h = \lambda \cdot h$
 - Ta čísla λ pro která má rovnice $A \cdot h = \lambda \cdot h$ nenulové řešení $h \neq 0$ (alespoň jedna složka vektoru h je různá od nuly) nazýváme vlastní čísla matice A
 - Konstantní nenulové vektory h , které pro dané vlastní číslo λ vyhovují rovnici $A \cdot h = \lambda \cdot h$ se nazývají vlastní vektory matice A příslušné vlastnímu číslu λ
- Postup pro určení vlastních čísel čtvercové matice A
 - Užitím vztahu $h = E \cdot h$, kde E je jednotková matice (např: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)
 - $A \cdot h = \lambda E \cdot h \rightarrow (A - \lambda E) \cdot h = 0$, kde $0 = (0, 0, \dots, 0)^T$
 - Toto je homogenní soustava rovnic, která má nekonečně mnoho řešení $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$
 - Determinant této soustavy položíme roven 0 $\rightarrow |A - \lambda E| = 0$
 - Dostaneme charakteristickou rovnici soustavy (G) $\rightarrow$
$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
 - Toto je algebraická rovnice n -tého stupně pro neznámou λ , která má n komplexních kořenů včetně násobnosti
 - Např. pro $n = 2$ je to kvadratická rovnice tvaru $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ kterou vyřešíme.
- Algoritmus řešení LODR1 $y' = A \cdot y$
 - Nalezneme všechna vlastní čísla λ matice A
 - Ke každému vlastnímu číslu λ matice A nalezneme vlastní vektor h
 - Pokud jsou všechna vlastní čísla reálná a navzájem různá, nalezní jsme n lineárně nezávislých partikulárních řešení soustavy $y' = A \cdot y$
 - Pokud jsou některá vlastní čísla λ násobnými kořeny charakteristické rovnice nebo jejími komplexními kořeny, použijeme dodatečné úpravy (viz příklady)
- Pro $n = 2$ hledáme dvě lineárně nezávislé neznámé funkce y_1, y_2
- OŘ je pak lineární kombinací těchto řešení



Poznámka k příkladu 11:

- Zkonstruovali jsme tedy komplexní řešení $w = u + iv$
- K nalezení dvou reálných řešení využijeme poznatek:

Má-li homogenní soustava $y' = Ay$ komplexní řešení $y = u + iv$, kde u, v jsou reálné vektory, potom má také komplexně sdružené řešení $\bar{y} = u - iv$ a zároveň řešení u a v .

- Naše soustava má také reálná řešení

$$u = e^{-6x} \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix} \text{ a } v = e^{-6x} \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin x + \cos x \end{pmatrix}, \text{ jsou lineárně nezávislá.}$$

Poznámka k příkladu 12:

- Koeficienty a, b ve vztahu $v = e^{-2x} \begin{pmatrix} ax + a_1 \\ bx + b_1 \end{pmatrix}$ bylo možno volit stejně, jako složky h_1, h_2 vlastního vektoru h .
- Lze ukázat, že je-li λ dvojnásobné reálné vlastní číslo matice A takové, že hodnota matice $A - \lambda E$ je rovna jedné (řádky jsou závislé a alespoň jeden je nenulový), pak lze partikulární řešení u předpokládat v obvyklém tvaru $u = e^{\lambda x} h$ a řešení v pak ve tvaru $v = e^{\lambda x} (hx + \bar{h})$, kde vektor $\bar{h}$ vyhovuje podmínce $(A - \lambda E)\bar{h} = h$.
- Tento postup neplatí v případě, že má matice A dvojnásobné reálné vlastní číslo λ takové, že soustava má tvar:

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda y_1 \\ y_2' &= \lambda y_2 \end{aligned}$$

- Tuto soustavu řešíme postupnou integrací
- Pro $n \geq 3$ je zobecněním ukázaných případů.

Obecná nehomogenní soustava LODR1

$$\text{Tvar: } y' = A \cdot y + f(x) \quad (H),$$

kde A je konstantní matice a $f(x)$ nenulová spojitá vektorová funkce na intervalu I .

Struktura obecného řešení OŘ

Obecné řešení soustavy (H) lze psát ve tvaru $y = y_h + y_p$, kde y_h je OŘ příslušné homogenní LODR1 a y_p je nějaké partikulární řešení původní nehomogenní LODR1.

- Exaktně umíme řešit pouze soustavy s konstantními koeficienty



Princip Superpozice

Lze-li v nehomogenní soustavě (H) vektorovou funkci $f(x)$ rozložit na součet tvaru

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_r(x)$$

a dovedeme-li určit partikulární řešení $y_{pj}(x)$ rovnice $y' = A \cdot y + f_j(x)$, pak

$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + \dots + y_{pr}(x)$ je partikulární řešení původní soustavy (H) .

Metoda variace konstant

Předpokládáme, že $y_1, y_2, \dots, y_n$ jsou LN partikulární řešení přidružené homogenní soustavy

Nechť $Y(x)$ je příslušná fundamentální matice řešení přidružené homogenní soustavy

- Pak OŘ této homogenní soustavy je tvaru:

$$y_h(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = Y(x) \cdot C, \text{ kde } C = (C_1; C_2; \dots; C_n)^T$$

OŘ $y(x)$ soustavy $y' = A \cdot y + f(x) \quad (H)$

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \dots + C_n(x) y_n(x) = Y(x) \cdot C(x) \quad (I)$$

$C(x) = [C_1(x); C_2(x); \dots; C_n(x)] \rightarrow$ složky $C(x)$ je potřeba určit.

- Dosadíme (I) do (H) :

$$Y'(x) \cdot C(x) + Y(x) \cdot C'(x) = A(x) \cdot Y(x) \cdot C(x) + f(x) \quad (J)$$

- Toto je soustava pro neznámé $C'_1(x), C'_2(x), \dots, C'_n(x)$
- Matice soustavy (J) je fundamentální matice $Y(x)$ (má nenulový determinant)
- Integrací $\int C'_j(x) dx$ dostaneme $C_j(x)$ pro $j = 1 \dots n \rightarrow$ OŘ y soustavy $y' = A \cdot y + f(x) \quad (H)$

Metoda neurčitých koeficientů

viz. příklad

