



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



*Vytvořeno v rámci projektu Rozvoj kvality vzdělávání, hodnocení
a strategického řízení na Univerzitě Pardubice, reg. č.
CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002320*

Úvod do finanční matematiky

poznámky k přednáškám

Posloupnost

Geometrická posloupnost (GP)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá GEOMETRICKÁ právě, když existuje takové reálné číslo q , že pro každé další přirozené číslo n je $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

Číslo q se nazývá kvocient GP

$$\{a_1; a_2; a_3; a_4; \dots; a_n\}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a_1 \quad a_1 q \quad a_1 q^2 \quad a_1 q^{n-1}$$

$$a_r = a_s q^{r-s}$$

➔ Součet s_n (prvních n členů) GP $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q_n

a) $q = 1 \rightarrow s_n = na_1$ Dk: $s_n = a_1 + a_1 + \dots + a_1 = na_1$

b) $q \neq 1 \rightarrow s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ Dk: $s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} \quad / \cdot q \quad |.$

$$qs_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^n \quad ||.$$

$$||. - I. \quad s_n q - s_n = -a_1 + a_1 q - a_1 q + a_1 q^2 - a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} - a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

$$s_n(q - 1) = a_1 q^n - a_1 = a_1(q^n - 1)$$

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

➔ Srovnání AP x GP

AP	GP
$a_n = a_{n-1} + d$ $a_n = a_1 + (n - 1)d$ $a_s = a_r + (s - r)d$ $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	$a_n = a_{n-1} q$ $a_n = a_1 q^{n-1}$ $a_s = a_r q^{s-r}$ $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, (q \neq 1)$

Užití GP

A) Růst (pokles)

Počátek	a_0	poč. 1. období a_0
přírůstek	p (%)	konec 1. období $a_1 = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$
očekávaný počet a_n po n letech		konec 2. období $a_2 = a_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$ konec n . období $a_n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$
$\left\{a_0; a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right); a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2; \dots; a_n \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n\right\}$ GP, první člen a_0 a kvocient $q = 1 + \frac{p}{100}$		

B) Složené úrokování

Úroková míra 1 obd.	$p\%$
úrokovací období	
jistina	J_0
daň z příjmu	15% (obecně $d\%$)
počátek J_0	
za 1 období úrok	$J_0 \frac{p}{100}$
daň:	$J_0 \frac{p}{100} \frac{d}{100}$
částka:	$J_0 + J_0 \frac{p}{100} - J_0 \frac{p}{100} \frac{d}{100} = J_0 \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p}{100} * \frac{d}{100}\right)$ $J_1 = J_0 \left[1 + \frac{p}{100} \left(1 - \frac{d}{100}\right)\right]$

Za 2. období

$J_1 \frac{p}{100}$	úrok
Daň	$J_0 \frac{p}{100} \frac{d}{100}$

$$J_2 = J_1 + \frac{p}{100} - J_1 \frac{p}{100} \frac{d}{100} = J_1 \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p}{100} \frac{d}{100}\right) = J_1 \left[1 + \frac{p}{100} \left(1 - \frac{d}{100}\right)\right]$$

$$J_2 = J_0 \left[1 + \frac{p}{100} \left(1 - \frac{d}{100}\right)\right] \left[1 + \frac{p}{100} \left(1 - \frac{d}{100}\right)\right] = J_0 \left[1 + \frac{p}{100} \left(1 - \frac{d}{100}\right)\right]^2$$

Za n období

$$J_n = J_0 \left[1 + \frac{p}{100} \left(1 - \frac{d}{100}\right)\right]^n$$

C) Spoření

Stejná částka I_0 každé úrokovací období (konec také!)

Úrok $p \%$
daň $d \%$ (15 %)

Za n období S

1 vl. částka je úročena n krát

2 vl. částka je úročena $(n - 1)$ krát

3 vl. částka je úročena $(n - 2)$ krát

$$S = I_0 \left[1 + \left(1 - \frac{d}{100} \right) * \frac{p}{100} \right]^n + I_0 \left[1 + \left(1 - \frac{d}{100} \right) * \frac{p}{100} \right]^{n-1} + \dots + I_0 \left[1 + \left(1 - \frac{d}{100} \right) * \frac{p}{100} \right] + I_0$$

$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$

$a_{n+1} \qquad \qquad \qquad a_n \qquad \qquad \qquad a_2 \qquad \qquad \qquad a_1$

$$S = I_0 \frac{\left[1 + \left(1 - \frac{d}{100} \right) \frac{p}{100} \right]^{n+1} - 1}{\left[1 + \left(1 - \frac{d}{100} \right) \frac{p}{100} \right] - 1} = I_0 \frac{\left[1 + \left(1 - \frac{d}{100} \right) \frac{p}{100} \right]^{n+1} - 1}{\left(1 - \frac{d}{100} \right) \frac{p}{100}}$$

D) Splátka úvěru

Př: Banka poskytla úvěr na počátku roku 1995 ve výši 1 000 000 Kč na 3 roky s roční úrokovou mírou 14 % (úrokovací období 1 rok). Splátka 1x za rok, první po jednom roce. Kolik činí splátka.

Splátka S
dluh na konci 1995 (+ úroky) $10^6(1 + 0,14)$
splátka S
dluh na poč. 1996 (po 1 splátce) $10^6(1 + 0,14) - S$

dluh na poč. 1997 (+ úroky – 2. splátka)

$$[10^6(1 + 0,14) - S](1 + 0,14) - S = 10^6(1 + 0,14)^2 - S(1 + 0,14) - S$$

dluh na poč. 1998 (+ úroky – 3. splátka)

$$\begin{aligned} & [10^6(1 + 0,14)^2 - S(1 + 0,14) - S](1 + 0,14) - S = \\ & = 10^6(1 + 0,14)^3 - S(1 + 0,14)^2 - S(1 + 0,14) - S \end{aligned}$$

úvěr bude splacen na konci 1998 $\rightarrow$ dluh = 0

$$\rightarrow 10^6(1 + 0,14)^3 - S(1 + 0,14)^2 - S(1 + 0,14) - S = 0$$

GP nahradíme součtem

$$10^6(1 + 0,14)^3 - S \frac{(1 + 0,14)^3 - 1}{(1 + 0,14) - 1} = 0$$

$$S = \frac{10^6(1 + 0,14)^3 \cdot 0,14}{(1 + 0,14)^3 - 1} \cong 430731,48 \text{ Kč}$$

Zobecnění: úvěr D , n úrokovacích období, úrok p procent, n stejných splátek

$$S = \frac{D \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \frac{p}{100}}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}$$

E) Spojité úročení

Př: částka 1000 Kč se ročně úročí 10% (konec roku 1100 Kč)

- Půlroční připisování úroků 1000 ($t = 0$) 1050 ($t = 1/2$) 1102,2 ($t = 1$)
- čtvrtroční připisování úroků 1000 1025 1050,625 1076,89 1103,81

$$1000 \ (t = 0) \quad 1025 \ (t = 1/4) \quad 1050,625 \ (t = \frac{1}{2}), 89 \ (t = 3/4) \quad 1103,81 \ (t = 1)$$

- Atď. -> spojitě úročení

$y(t)$... výše částky v Kč v čase t $y(\text{Kč})$ $t(\text{roky})$

- roční úročení $t \geq 1$ $y(t+1) = y(t) + \frac{y(t)}{10}$; $t \geq 1$
přičemž $y(t)$ v čase $t \in (0; 1)$ je dána počátečním vkladem

$$\rightarrow \text{když } t \in (0; 1) \quad y(t) = 1000$$

$$\rightarrow y(1) = y(0) + \frac{y(0)}{10} = 1000 + \frac{1000}{10} = 1100$$

$$t=0$$

- $\frac{1}{2}$ roční úročení $t \geq 1/2$ $y(t+1/2) = y(t) + \frac{y(t)}{20}$; $t \geq 1/2$
 $\rightarrow \text{když } t \in (0; 1/2) \quad y(t) = 1000$

$$y(1/2) = y(0) + \frac{y(0)}{20} = 1000 + \frac{1000}{20} = 1050$$

$$y(1) = y(1/2) + \frac{y(1/2)}{20} = 1050 + \frac{1050}{20} = 1102,2$$

- atď:
- pro spojitě úrokování zavedme h délka časového úseku (v rocích) pro připisování úroků
(dříve bylo $h = 1$; $h = 1/2$)

$$t \geq h \quad y(t+h) = y(t) + \frac{y(t)}{10} h \rightarrow \frac{y(t+h)-y(t)}{h} = \frac{y(t)}{10}; \quad y(t) = 1000 \text{ pro } t \in (0; h)$$

- spojitě úročení $h \rightarrow 0$ limitní přechod:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t)}{10} \rightarrow \frac{dy}{dt}(t) = \frac{y(t)}{10}; \quad t \geq 0; \quad y(0) = 1000$$

➤ DR. $y' = \frac{y}{10}$; $y(0) = 1000$ počáteční problém

➤ Zobecnění: částka I_0 úrok $p\%$ $y(0) = I_0$

$$y' = \frac{1}{p} y$$

$$\frac{d(y)}{dt} = \frac{y}{p}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{p}$$

$$\ln|y| = \frac{1}{p} t + c$$

$$\text{OŘ: } y = e^{\frac{1}{p}t+C} = C \cdot e^{\frac{1}{p}t}$$

$$\text{PP. } y(0) = 1000 \quad I_0 = C \cdot e^{\frac{1}{p}0} \rightarrow C = I_0$$

$$\text{PŘ: } y = I_0 \cdot e^{\frac{1}{p}t}$$

$$\text{Pro náš příklad } y(1) = 1000 e^{\frac{1}{10} \cdot 1} = 1105,17 \text{ Kč}$$

Pokud do výpočtu vstoupí daň d % vstoupí do výpočtu hod. $\frac{1-d}{100}$

$$y = I_0 e^{\frac{100-d}{100} \cdot \frac{1}{p} \cdot t}$$

F) Pravidlo přírodního růstu (poklesu) růst populace

Předpokládáme: ideální podmínky (nekonečný prostor, výživa, bez predátorů, imunita proti nákazám)

t time (nezávislá proměnná)

P počet individualit v populaci (závislá proměnná)

Míra růstu populace ... derivace v čase $\frac{dP}{dt}$ je přímo úměrná velikosti populace (násobení konstantou)

$$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = kP \quad k \text{ je konstanta}$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int k \cdot dt$$

$$\ln|P| = kt + C$$

$$P = Ae^{kt}; P(0) = P_0; A = P_0 \rightarrow P = P_0 e^{kt}$$

důsledek 1 RCE lze přepsat $\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dt} = k$ relativní míra růstu je konstantní

důsledek 2 Emigrace: míra emigrace ... m

míra změny populace je $\frac{dP}{dt} = kP - m$

G) Logistický model

Reálné modely musí reagovat na velikost prostředí a omezené zdroje.

-start; exponenciální růst -> kritická kapacita M

2 předpoklady -> $\frac{dP}{dt} \approx kP$ (když P je malé -> míra růstu je úměrná P)

$$\rightarrow \frac{dP}{dt} < 0 \text{ když } P > M$$

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

$$\int \frac{dP}{P(1 - \frac{P}{M})} = \int \frac{M}{P(M-P)} dP = \int \frac{1}{P} dP + \int \frac{1}{M-P} dP = \ln|P| - \ln|M-P|$$

$$\frac{M}{P(M-P)} = \frac{a}{P} + \frac{b}{M-P} = \frac{aM - aP + bP}{P(M-P)} \rightarrow M: a = 1; P: 0 = -(a+b) = -1+b \rightarrow b = 1$$

$$\int \frac{dP}{P(1 - \frac{P}{M})} = \int k dt$$

$$\ln|P| - \ln|M-P| = kt + C$$

$$\ln \left| \frac{P}{M-P} \right| = kt + C$$

$$\frac{P}{M-P} = e^{kt+C} = Ae^{kt}$$

$$P + PAe^{kt} = AMe^{kt}$$

$$P(1 + Ae^{kt}) = AMe^{kt}$$

$$P = \frac{AMe^{kt}}{1 + Ae^{kt}} = \frac{M}{\frac{1}{Ae^{kt}} + 1} = \frac{M}{1 + \frac{1}{A}e^{-kt}} = \frac{M}{1 + Be^{-kt}}$$

B konst. $t = 0; P = P_0$

$$P_0 = \frac{M}{1 + Be^0} \quad P_0 + P_0 B = M \rightarrow B = \frac{M - P_0}{P_0}$$

Řešení LM:

$$P(t) = \frac{M}{1 + Be^{-kt}}; B = \frac{M - P_0}{P_0}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M}{1 + \frac{M - P_0}{P_0} e^{-kt}} = M$$

H) Další modely růstu

$$\rightarrow \frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) - C \quad C \text{ pravidelně se ubírá}$$

$$\rightarrow \frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right) \quad m \text{ minimální hodnota, kdy uvažované druhy vymírají}$$

I) Sigmoidální růstová křivka

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{k}\right) \quad \text{Plod: } 0 \leq t \leq 10 \rightarrow \text{sigmoidální růstová křivka}$$

$$r = 1; k = 1 \quad N(0) = 0,01 \text{ (FISH per } m^3 \text{)}$$

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(\frac{k-N}{k}\right) \quad \int \frac{dN}{N(1-N)} = \int \frac{1}{N} dN + \int \frac{1}{1-N} dN = \ln|N| - \ln|1-N| + C$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{r}{k} N(K - N) \quad \frac{1}{N(1-N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{1-N} = \frac{A1-AN+BN}{N(1-N)} = \frac{N(B-A)+A1}{N(1-N)}$$

$$\int \frac{dN}{N(k-N)} = \int \frac{r}{k} dt \quad B - A = 0 \quad B = A - 1 \quad A = 1$$

$$\int \frac{dk}{N(1-N)} = \int dt \quad \text{PŘ: } 0,01 = \frac{1}{1+De^0} = \frac{1}{1+D}$$

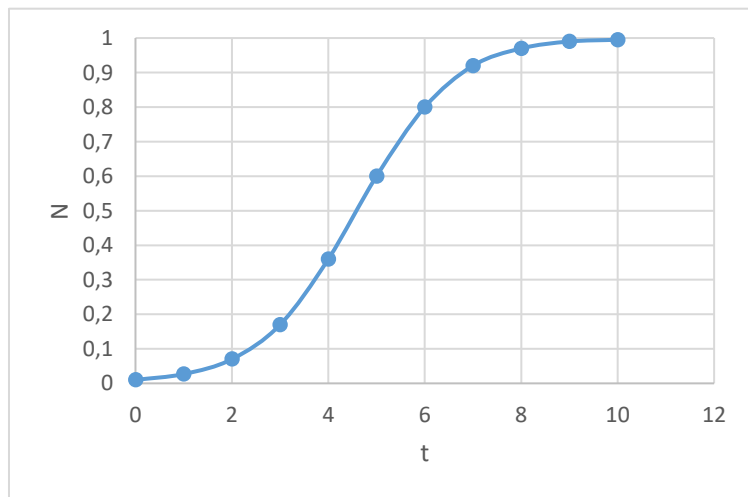
$$\ln \left| \frac{N}{1-N} \right| = Ce^t \quad 1 + D = 100 \quad D = 99$$

$$N = Ce^t - CNe^t \quad \text{PŘ: } N = \frac{1}{1+99e^{-t}}$$

$$N(1 + Ce^t) = Ce^t$$

$$N = \frac{Ce^t}{1 + Ce^t} = \frac{1}{\frac{1}{C}e^{-t} + 1} = \frac{1}{1 + De^{-t}}$$

$$\text{OŘ: } N = \frac{1}{1 + 0e^{-t}}$$



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	0,01	0,027	0,07	0,17	0,36	0,6	0,8	0,92	0,97	0,99	0,995